Image de l'exponentielle.

[Max de Maths].

Thm : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall A \in GL_n(\mathbb{C})$, $\exists P \in \mathbb{C}[X]$, $A = \exp(P(A))$. En particulier, $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

- $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\exp A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \in \mathbb{C}[A]$ car $\mathbb{C}[A]$ est fermé, comme sev de dimension finie, dans $M_n(\mathbb{C})$.

- Montrons que $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$ où $\mathbb{C}[A]^\times = \{M \in \mathbb{C}[A],\ M \text{ inversible et } M^{-1} \in \mathbb{C}[A]\}$.
Le sens direct est clair. Réciproquement, si $B \in \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$ et μ_B son polynôme min. : si $X \mid \mu_B$, alors $\mu_B = XQ$ puis $B.Q(B) = 0$ donc $Q(B) = 0$ car B inversible, ce qui contredit la minimalité de μ_B. Donc $\mu_B = \alpha + XQ$, puis $B^{-1} = -\frac{Q(B)}{\alpha} \in \mathbb{C}[B] \subset \mathbb{C}[A]$.

- Ainsi, $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[A]^\times$.
$\forall M, N \in \mathbb{C}[A]$, M et N commutent, donc $\exp M . \exp N = \exp(M+N)$.

- $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$ car $GL_n(\mathbb{C}) = \det^{-1}(\mathbb{C}^*)$ ouvert.
Si $M, N \in \mathbb{C}[A]^\times$, alors $\varphi : z \mapsto \det(zM + (1-z)N)$ est un polynôme non nul (car $\varphi(0), \varphi(1) \neq 0$). Soit Z l'ensemble de ses racines. Z est fini, donc $\mathbb{C} \setminus Z$ est connexe par arcs, et contient 0 et 1. $\exists \gamma$ continue reliant 0 et 1 dans $\mathbb{C} \setminus Z$.
Donc $t \mapsto \gamma(t)M + (1-\gamma(t))N$ relie M et N dans $\mathbb{C}[A]^\times$. $\mathbb{C}[A]^\times$ est <u>connexe</u>.

- $\exp$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}[A]$ et $D\exp(0) = Id$ bijective.
Par TIL, il existe U v.o. de 0 dans $\mathbb{C}[A]$, V v.o. de I_n dans $\mathbb{C}[A]^\times$, $\exp : U \to V$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféo.
Par double inclusion, par commutativité, pour $B \in \mathbb{C}[A]$, $\exp(B+U) = \exp(B)V$ et puisque $\exp(B)$ est inversible, $A \mapsto \exp(B)A$ est bicontinue, donc $e^B V$ est un ouvert, i.e. un voisinage de $\exp(B)$ dans $\mathbb{C}[A]^\times$.
De là, puisque $\exp(B)V = \exp(B+U) \subset \exp(\mathbb{C}[A])$, $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un voisinage de chacun de ses points, donc <u>ouvert</u>.

- <u>Lemme</u> : $\mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A]) = \bigcup_{M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])} M \exp(\mathbb{C}[A])$.
$\subseteq$: Si $M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$, alors $M = M I_n = M \exp(0) \in \bigcup_{M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])} M \exp(\mathbb{C}[A])$
$\supseteq$: Soit $M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$. Soit $N \in M \exp(\mathbb{C}[A])$.
On a $N \in \mathbb{C}[A]^\times$ et si $N \in \exp(\mathbb{C}[A])$, alors $M \in \exp(\mathbb{C}[A])$, absurde.

Or $\forall M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$, $M\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert (comme précédemment)
Donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ est fermé.

Ainsi $\mathbb{C}[A]^\times = \exp(\mathbb{C}[A])$.

Cor : $\exp(M_n(\mathbb{R})) = \{A^2,\ A \in GL_n(\mathbb{R})\}$.

$\subseteq$: Si $B = \exp M$, alors $B = \exp\left(\frac{M}{2}\right)^2$.

$\supseteq$: Soit $B = A^2$, avec $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

$\exists P \in \mathbb{C}[X]$, $A = \exp(P(A))$. Mais alors, $\bar{A} = A$

$$= \exp(\bar{P}(A))$$

Donc $A^2 = \exp(P(A) + \bar{P}(A))$, donc $B \in \exp(M_n(\mathbb{R}))$.